



2019 牛客暑期多校训练营 第一场

郭晓絮



A. Equivalent Prefixes

• 做法 1

- 题中的 “equivalent” 等价于笛卡尔树相同
- 二分答案，比较两个前缀的笛卡尔树 $O(n \log n)$

• 做法 2

- 对于数组 a ，定义 $last_a(i) = \max \{j : j < i \text{ and } a_j > a_i\}$
- 如果 $last_a = last_b$ ，那么数组 a 和 b “equivalent”
证明： $n, last(n), last(last(n)), \dots$ 是笛卡尔树的最右路径，递归构造
- 单调队列求 $last$ 并比较 $O(n)$



B. Integration

- 令 $c_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (a_j^2 - a_i^2)}$
- 则 $\frac{1}{\prod (a_i^2 + x^2)} = \sum \frac{c_i}{a_i^2 + x^2}$
- 而 $\int_0^{\infty} \frac{c_i}{a_i^2 + x^2} dx = \frac{c_i}{2a_i} \pi$



C. Euclidean Distance

- 根据拉格朗日乘子法, 答案是 $\max_{\lambda} f(\lambda)$, 其中
 - $f(\lambda) = \min_{p \geq 0} \sum (p_i - a_i)^2 + 2\lambda(\sum p_i - 1)$
- 而 $f(\lambda) = \min_{p \geq 0} \sum (p_i - (a_i - \lambda))^2 + \sum (a_i^2 - (a_i - \lambda)^2) - 2\lambda$
- 因为 p_i 独立, 所以 $\min_{p \geq 0} \sum (p_i - (a_i - \lambda))^2 = \sum \min(a_i - \lambda, 0)^2$
- 所以 f 是分 n 段的二次函数, 每段单独求出最值



D. Parity of Tuples

- 考虑长度为 2^k 的数组 F , 考虑元组 (a_1, a_2, \dots, a_m)
- 对于所有 $[m]$ 的子集 S , 把 $F[\text{xor}_{i \in S} a_i]$ 加上 $(-1)^{|S|}$.
- 对 F 进行 FWT, $\text{FWT}(F)[x] / 2^m$ 就是答案
- 复杂度是 $O(n 2^m + k 2^k)$

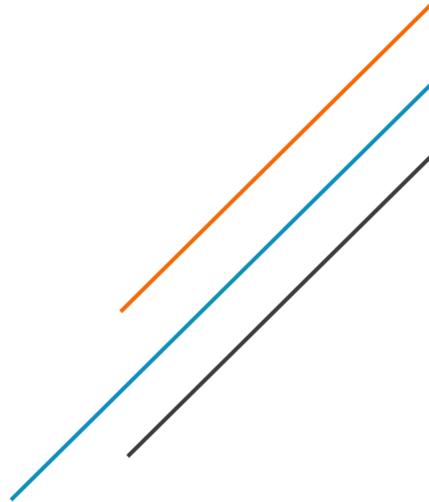
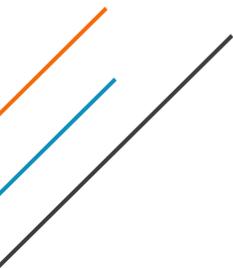


E. ABBA

- 考虑判定给定串 S 是否能够由 n 个 AB 和 m 个 BA 构成
 - 贪心, A 肯定是先用 AB 的 A , 再用 BA 的 A ; B 同理
- DP 设 $f(x, y)$ 是有 x 个 A , y 个 B 的前缀方案数
 - 转移枚举下一个字符是 A 还是 B
 - 通过 x, y, n, m 可以知道剩余的 AB, BA, B 和 A 的数量

F. Random Point in Triangle

- 答案是 $11/2$ 倍三角形 ABC 的面积





G. Substrings 2

- 设 $\text{last}(i) = \min\{i-j : j < i \text{ and } s_j = s_i\}$
 - 两个字符串 last 相等等价于同构
- 从后往前维护 s 每个后缀的 last，每次要改一个位置，用持久化分块数组维护，并维护每块所有后缀的 RK Hash
- 直接 `std::sort` 排序所有后缀的 last，求 LCP 时在分块数组上两个版本直接比较
- 复杂度是 $O(n \log n \sqrt{n})$



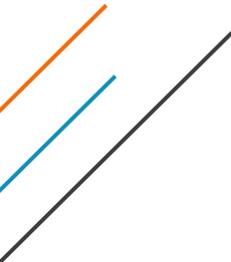
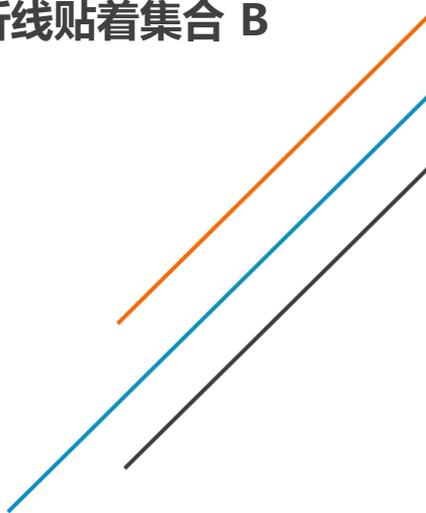
H. XOR

- 利用期望的线性性，等价于计算每个数在集合中的方案数
- 先消一次元，设会得到 r 个基，那么对于剩下 $n-r$ 个数，方案数都是 2^{n-r-1}
- 再对除了 r 个基外的 $n-r$ 个数消个元，得到另一组基 B ，枚举 r 个基中的一个，用另外的 $r-1+B$ 个数消元
- 因为 $r, B < 64$ ，所以复杂度是 $64n + 64^3$.



I. Points Division

- 一定存在一条 xy 单调不降的折线把点集划分为 AB 两个部分，不妨假设折线贴着集合 B
- DP
 - 设 $dp(i)$ 是点 i 在折线上的最大值，枚举上一个点 j
 - 对于所有 $x_j < x_k < x_i$ 且 $y_j > y_k$ ，都在折线下方
 - 线段树维护每个决策点 j 当前的代价 $O(n \log n)$





J. Fraction Comparison

- 把 $\frac{x}{a}$ 写成 $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + \frac{x \bmod a}{a}$
- 先比整数部分，分数部分分子分母都在 10^9 范围内，交叉相乘比较

Thanks

