2019 牛客暑期多校训练营 第一场

郭晓絮

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

A. Equivalent Prefixes

- **做法 1**
  - 题中的“equivalent”等价于笛卡尔树相同
  - 二分答案，比较两个前缀的笛卡尔树 $O(n \log n)$
- **做法 2**
  - 对于数组 a，定义 $last_a(i) = \max \{ j : j < i \text{ and } a_j > a_i \}$
  - 如果 $last_a = last_b$，那么数组 a 和 b “equivalent”
    证明：n, last(n), last(last(n)), ... 是笛卡尔树的最右路径，递归构造
  - 单调队列求 last 并比较 $O(n)$

B. Integration

- 令 $c_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}\left(a_j^2 - a_i^2\right)}$
- 则 $\frac{1}{\prod\left(a_i^2 + x^2\right)} = \sum \frac{c_i}{a_i^2 + x^2}$
- 而 $\int_0^{\infty} \frac{c_i}{a_i^2 + x^2} dx = \frac{c_i}{2a_i} \pi$

C. Euclidean Distance

- 根据拉格朗日乘子法，答案是 $\max\limits_{\lambda} f(\lambda)$， 其中
  - $f(\lambda) = \min\limits_{p \geq 0} \sum (p_i - a_i)^2 + 2\lambda(\sum p_i - 1)$
- 而 $f(\lambda) = min_{p\geq 0} \sum (p_i - (a_i - \lambda))^2 + \sum \left(a_i^2 - (a_i - \lambda)^2\right) - 2\lambda$
- 因为 p_i 独立，所以 $\min\limits_{p \geq 0} \sum (p_i - (a_i - \lambda))^2 = \sum \min(a_i - \lambda, 0)^2$
- 所以 f 是分 n 段的二次函数，每段单独求出最值

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

D. Parity of Tuples

- 考虑长度为 2^k 的数组 F，考虑元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$
- 对于所有 [m] 的子集 S，把 $F[\mathrm{xor}_{i \text{ in } S}\ a\_i]$ 加上 $(-1)^{|S|}$.
- 对 F 进行 FWT，$\mathrm{FWT}(F)[x] / 2^m$ 就是答案
- 复杂度是 $O(n\ 2^m + k\ 2^k)$

E. ABBA

- **考虑判定给定串 S 是否能够由 n 个 AB 和 m 个 BA 构成**
  - 贪心，A 肯定是先用 AB 的 A，再用 BA 的 A；B 同理
- **DP 设 f(x, y) 是有 x 个 A，y 个 B 的前缀方案数**
  - 转移枚举下一个字符是 A 还是 B
  - 通过 x, y, n, m 可以知道剩余的 AB，BA，B 和 A 的数量

F. Random Point in Triangle

- 答案是 11/2 倍三角形 ABC 的面积

G. Substrings 2

- 设 $last(i) = \min\{i-j : j < i \text{ and } s_j = s_i\}$
  - 两个字符串 last 相等等价于同构
- 从后往前维护 s 每个后缀的 last，每次要改一个位置，用持久化分块数组维护，并维护每块所有后缀的 RK Hash
- 直接 std::sort 排序所有后缀的 last，求 LCP 时在分块数组上两个版本直接比较
- 复杂度是 O(n log n sqrt{n})

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

H. XOR

- 利用期望的线性性，等价于计算每个数在集合中的方案数
- 先消一次元，设会得到 r 个基，那么对于剩下 n-r 个数，方案数都是 2^{n-r-1}
- 再对除了 r 个基外的 n-r 个数消个元，得到另一组基 B，枚举 r 个基中的一个，用另外的 r-1+B 个数消元
- 因为 r, B < 64, 所以复杂度是 $64n + 64^3$.

I. Points Division

- **一定存在一条 xy 单调不降的折线把点集划分为 AB 两个部分，不妨假设折线贴着集合 B**
- **DP**
  - 设 dp(i) 是点 i 在折线上的最大值，枚举上一个点 j
  - 对于所有 $x_j < x_k < x_i$ 且 $y_j > y_k$，都在折线下方
  - 线段树维护每个决策点 j 当前的代价 O(n log n)

J. Fraction Comparision

- 把 $\frac{x}{a}$ 写成 $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + \frac{x \ mod \ a}{a}$
- 先比整数部分，分数部分分子分母都在 10^9 范围内，交叉相乘比较

Thanks