



2019牛客暑期多校训练营 第十场

南京大学ACM集训队



Problem H: Stammering Chemists

- **easy, 签到, 模拟**

方法一：按照题意（图片）将每种形态的树按照特征（度数，叶子等）区分。

方法二：对每棵树编码，枚举每个全排列，判断是否完全相同。



Problem B: Coffee Chicken

- easy , 签到 , 递归

记 $f(i)$ 表示 $S(i)$ 的长度, $f(i)=f(i-2)+f(i-1)$ 。

递归调用 $\text{solve}(k,n)$ 表示 $S(k)$ 的第 n 个字符。

若 $k \leq 2$ 直接返回答案。

$k > 2$ 时, 若 $n > f(i-2)$, 调用 $\text{solve}(k-1, n-f(i-2))$; 否则调用 $\text{solve}(k-2, n)$ 。



Problem E: Hilbert Sort

- **easy, 编码, 排序**

题目给出的是“希尔伯特曲线”，属于“分形”。

给所有点编码，具体可以递归实现，用 $get(x,y,k)$ 表示大小为 2^k 的希尔伯特曲线中 (x,y) 号点的坐标。

然后讨论 (x,y) 在四个角的情况，然后进行一定的坐标变换即可。

Problem D: Han Xin and His Troops

- **medium-easy , 数论**

- 判定给定方程组在整个自然数域无解的条件：存在 (i,j) ，令 $d=\gcd(p_i,p_j)$ ， $a_i \bmod d \neq b_i \bmod d$ 。
- 在有解的条件下，找出最小的满足条件的解有许多方法：
- 方法一：先将所有同余方程组分解成对于所有模数都两两互质的形式，然后套用中国剩余定理，注意运算过程中超过long long的情况，可以通过python或_int128辅助实现。
- 方法二：注意构造满足前 i 个方程的最小自然数解。假设前 $i-1$ 个方程的最小自然数解为 $f(i-1)$ ， $\text{lcm}(p_1,p_2,\dots,p_{i-1})=y$ ，则求解 $f(i)$ 时，令 $f(i)=f(i-1)$ ，然后让 $f(i)$ 每次加上 y ，直到满足第 i 个方程未知。可以证明，在保证有解的情况下，加法运算不会超过 p_i 次。
- std使用了方法二的做法，实现比较简单，不会用爆long long的问题，但是该方法仅限于求解 p_i 比较小的同余方程组。



Problem F: Popping Balloons

- **medium-easy** , 贪心 , set
- 用 $f(i)$ 表示中间一枪打第 i 行，能够射中的气球个数；用 $g(i)$ 表示中间一枪打第 i 列，能射中的气球个数。
- 用multiset存所有 $g(i)$ 的值，枚举中间一枪打第 x 行，将对每一个位于第 $x-r, x, x+r$ 行的气球，将它们影响到的列（共三列）的 $g(j)$ 的值更新，然后更新multiset内的元素。
- 中间一枪打第 x 行的最大收益即 $f(x) + (\text{当前multiset内最大元素})$ 。



Problem J : Wood Processing

- **medium-easy , 动态规划**
- 每次裁剪的一刀一定是对于高度连续的一段，故先将所有木板按高度从大到小排序。
- $dp[i][j]$ 表示前*i*刀，割了高度前*j*高的木板，所浪费的最小代价。
- 转移有 $dp[i][j] = \max_k(dp[i-1][k] + sum[j] - sum[k] - height[j] * (lens[j] - lens[k]))$ ，其中 $sum[x]$ 表示前*x*高的木板的总面积， $lens[x]$ 表示前*x*高的木板的总宽度。
- 上述转移拥有决策单调性，可以通过经典的分治优化dp进行优化。
- wqs二分在本题也适用。
- 复杂度 $O(nk \log n)$ 。

Problem G: Road Construction

- **medium , 几何**
- 最优的直线一定平行或垂直于两个点的连线。
- 枚举最优直线斜率（最多有 n^2 个），然后用kth-element找到以这条直线排序的中间两个点，答案即两个点到该直线的距离差。
- 复杂度： $O(n^3)$ 。
- 本题可以通过斜率排序+旋转直线斜率的方法，做到 $O(1)$ 更新所有点到直线的距离排序顺序（因为每次只交换相邻2点），可以将本题的复杂度优化到 $O(n^2 \log n)$ ，但是由于本题重点在于考察发现直线的性质，故没有做加强。



Problem A : Blackjack

- **medium** , 动态规划 , 概率
- Calabash的最优策略即一直抽牌 , 直到抽到的牌的点数 $> a$ 为止。
- 枚举Calabash最后一张抽的牌 (设点数为 x) , 若他抽完这张牌 , 点数和 $> a$, 且获胜 (点数和 $\leq b$) , 则之前抽到牌的点数和在区间 $(a-x, \min(a, b-x)]$ 内。
- 用 $dp[i][j]$ 表示除了枚举的牌 , 在剩余的牌中抽的前 i 张牌 , 点数和为 j 的概率。
- 转移 : $f[k][i][j] = f[k-1][i][j] + f[k-1][i-1][j-x_k] * i / (n-i+1)$ 。 $dp[i][j] = f[n-1][i][j]$ 。
- 则之前抽了 i 张牌 , 点数和 j 在 $(a-x, \min(a, b-x)]$ 内 , 对答案的贡献即 $dp[i][j] / (n-i)$ 。



Problem A : Blackjack

- **medium** , **动态规划** , **概率**
- 枚举一张牌后, 计算对答案的贡献是 $O(500^2)$ 的, 但是每次计算dp值的复杂度为 $O(500^3)$ 。总复杂度为 $O(500^4)$ 。
- 这里可以利用“可逆背包”的做法, 先预处理出 $F[i][j]$ 表示考虑所有牌, 抽到前 i 张牌, 点数和为 j 的概率, 然后每次枚举一张牌时, 可以 $O(500^2)$ 撤销这张牌对 $F[i][j]$ 的贡献, $O(500^2)$ 的得到dp值。
- 总复杂度: $O(500^3)$ 。



Problem C: Gifted Composer

- **medium , 二分 , hash**
- 考虑长度 x 作为周期出现的时间，一定是从时间 $t=x$ 时，直到某个时刻的一个区间。
- 可以通过二分找到长度 x 作为周期消失的时间。
- 如何快速判断一个字符串 $S[1..n]$ 是否有 x 作为周期？
- 只需判断 $S[1..n-x]$ 是否等于 $S[x+1..n]$ 即可。由于询问是离线的，可以预处理出整个最终串的hash值，这样二分答案后的每次询问都可以 $O(1)$ 回答。
- 复杂度: $O(n \log n)$ 。



Problem I : Travel Dream

- **hard , 随机 , color-coding**

- 每次将所有点随机染成0/1的颜色，假设最大环为 (v_1, v_2, \dots, v_k) ，则环上恰好连续 $k/2$ 个点颜色为0，剩下 $k - k/2$ 个点颜色为1的概率为 $k/(2^k)$ 。
- 现在我们只要分别对颜色为0，1的点的连通块，用 $O((n+m)^2)$ 的时间求出每两个点对之间长度为 $k/2 - 1$ 和 $(k - k/2) - 1$ 的最长简单路径长度，分别用 $f[0][u][v], f[1][u][v]$ 存储。其中 $k/2 - 1, (k - k/2) - 1 \leq 4$ 。
- 再枚举两条跨过0，1两个联通块的边 $e_1(u_1, v_1), e_2(u_2, v_2)$ ，不妨设 u_1, v_1 颜色为0， u_2, v_2 颜色为1，用 $f[0][u_1][u_2] + e_1 + e_2 + f[1][v_1][v_2]$ 更新答案即可。
- 每次随机后，最大答案将以 $k/(2^k)$ 的概率得到。若随机 T 次，得不到最大答案的概率为 $(1 - k/(2^k))^T$ 。
- $k=10$ 时，取 $T=1000$ ， $(1 - k/(2^k))^T = 5e-5$ ，可以忽略不计。



Problem I : Travel Dream

- **hard , 随机 , color-coding**

- 分类讨论，给出 $O((n+m)^2)$ 找到一张图中任意两点之间长度为 $len=1,2,3,4$ 的最长简单路径做法：
- $len=1$: 直接枚举边。复杂度： $O(m)$ 。
- $len=2$: 直接枚举两条边，判断是否共点，若共点 $(u,w),(v,w)$ ，则更新 (u,v) 的答案。
- $len=3$: 枚举两条边，判断是否共点，若不共点 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ ，若 (u_1,u_2) 有边，更新 (v_1,v_2) 的答案，对其余3个pair做类似的更新。
- $len=4$: 用 $len=2$ 的方法，先对每个点对 (u,v) 求出长度为2的前3长的路径已经对应的经过点编号。然后枚举两条边，判断是否共点，若不共点 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ ，取 (u_1,u_2) 之间最长的且不经过 v_1 或 v_2 的长度为2的路径，更新 (v_1,v_2) 的答案，对其余3个pair做类似的更新。

Thanks

